PART3　（等差数列）×（等比数列）の和

例題

次の和 S を求めよ。

$$S=1\cdot3+2\cdot3^2+3\cdot3^3+\cdots\cdots+n\cdot3^n$$

Point Pickup

練習

次の和 S を求めよ。

$$S=2\cdot 1+4\cdot 2+6\cdot 2^2+\cdots\cdots+2n\cdot 2^{n-1}$$

第 3 講　PART3 確認問題

1　次の和を求めよ。

$$S=1\cdot5+2\cdot5^2+3\cdot5^3+\cdots\cdots+n\cdot5^n$$

$$S=\frac{(\boxed{\text{ア}}\,n-\boxed{\text{イ}})\cdot5^{n+1}+\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エオ}}}$$

PART3　（等差数列）×（等比数列）の和

例題

次の和 S を求めよ。

$$S=1\cdot3+2\cdot3^2+3\cdot3^3+\cdots\cdots+n\cdot3^n$$

$$S=1\cdot3+2\cdot3^2+3\cdot3^3+\cdots\cdots+n\cdot3^n \quad \cdots\cdots ①$$

①の両辺に 3 を掛けると

$$3S=\quad 1\cdot3^2+2\cdot3^3+\cdots\cdots+(n-1)\cdot3^n+n\cdot3^{n+1} \quad \cdots\cdots ②$$

①－②より

$$-2S=1\cdot3+1\cdot3^2+1\cdot3^3+\cdots\cdots+1\cdot3^n-n\cdot3^{n+1}$$

$$=\frac{3(3^n-1)}{3-1}-n\cdot3^{n+1}$$

$$=\frac{3}{2}(3^n-1)-n\cdot3^{n+1}=\frac{1}{2}\cdot3^{n+1}-\frac{3}{2}-n\cdot3^{n+1}=\frac{1-2n}{2}\cdot3^{n+1}-\frac{3}{2}$$

よって　$S=\dfrac{2n-1}{4}\cdot3^{n+1}+\dfrac{3}{4}$

練習

次の和 S を求めよ。

$$S=2\cdot1+4\cdot2+6\cdot2^2+\cdots\cdots+2n\cdot2^{n-1}$$

$$S=2\cdot1+4\cdot2+6\cdot2^2+\cdots\cdots+2n\cdot2^{n-1} \quad \cdots\cdots ①$$

①の両辺に 2 を掛けると

$$2S= \quad 2\cdot2+4\cdot2^2+\cdots\cdots+(2n-2)\cdot2^{n-1}+2n\cdot2^n \quad \cdots\cdots ②$$

①－②より

$$-S=2\cdot1+2\cdot2+2\cdot2^2+\cdots\cdots+2\cdot2^{n-1}-2n\cdot2^n$$

$$=\frac{2(2^n-1)}{2-1}-2n\cdot2^n$$

$$=2(2^n-1)-2n\cdot2^n=2\cdot2^n-2-2n\cdot2^n=(1-n)\cdot2^{n+1}-2$$

よって　$S=(n-1)\cdot2^{n+1}+2$

第3講　PART3 確認問題 解答

1　**[正解]** ア：4，イ：1，ウ：5，エオ：16

[解説]

$$S=1\cdot5+2\cdot5^2+3\cdot5^3+\cdots\cdots+n\cdot5^n \quad \cdots\cdots①$$

①の両辺に5を掛けると

$$5S=1\cdot5^2+2\cdot5^3+3\cdot5^4+\cdots\cdots+(n-1)5^n+n\cdot5^{n+1} \quad \cdots②$$

①－②より [A]

$$-4S=1\cdot5+1\cdot5^2+1\cdot5^3+\cdots\cdots+1\cdot5^n-n\cdot5^{n+1}$$

$$=(5+5^2+5^3+\cdots\cdots+5^n)-n\cdot5^{n+1}$$

$$=\frac{5(5^n-1)}{5-1}-n\cdot5^{n+1}$$

$$=\frac{5^{n+1}-5-4n\cdot5^{n+1}}{4}$$

$$=\frac{(1-4n)\cdot5^{n+1}-5}{4}$$

よって　$\boldsymbol{S=\frac{(4n-1)\cdot5^{n+1}+5}{16}}$

[A]　（等差数列）×（等比数列）の和
一般項が（等差数列）×（等比数列）の形をした数列の和 S は，等比数列の公比 r を用いて $S-rS$ を計算することで求めることができる。